UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail :office@ucad.sn
siteweb :officedubac.sn

2023GS26NA0132
Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 **(03 points)**

1) Soit a un nombre rationnel strictement positif et n un entier naturel. Donner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. **(1,5 pt)**

2) Donner les primitives des fonctions suivantes :

a) $(exp\circ f)f'$ b) $\frac{f'}{f}$. **(1,5 pt)**

EXERCICE 2 **(04 points)**

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$$P(z) = 2\,z^3 - 3\,(1+i)\,z^2 + 4i\,z + 1 - i, \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble (E) des points M de son plan de représentation tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\| \le 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

1) Vérifier que 1 et i sont des racines de P. **(0,5 pt)**
2) Déterminer le polynôme g tel que $P(z) = (z-1)\,(z-i)\,g(z)\cdot$ **(0,5 pt)**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,5 pt)**
4) On pose $z_A = 1, z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$.
   a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ en choisissant comme unité graphique $4\,cm$. **(0,75 pt)**
   b) Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble (E). **(0,5 pt)**
   c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1)\,;\,(B,1)\,;\,(O,2)\}$, puis placer G. **(0,5 pt)**
5) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\| \le 2$. **(0,5 pt)**
6) Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif ? **(0,25 pt)**

EXERCICE 3 **(04 points)**

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}U_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

1) Déterminer U_1 et U_2. **(0,5 pt)**
2) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ U_n \ge \sqrt{3}$. **(01 pt)**
3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\,x$.
   a) Etudier le sens de variations de f. **(01 pt)**
   b) En déduire par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**
4) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **(01pt)**

PROBLEME **(09 pts)**

PARTIE A **(02 pts)**

On considère l'équation différentielle $(E) : \frac{1}{2}\,y' + y = 3\,e^{-2x} + 2$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : \frac{1}{2}\,y' + y = 0$. **(0,25 pt)**
2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\,e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E). **(0,5 pt)**
3) a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $a = 6$ et $b = 2$.
   Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E). **(0,5 pt)**

4) Déterminer la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O. **(0,25 pt)**

PARTIE B **(07 pts)**

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x-2)e^{-2x}+2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **(0,5 pt)**
2) Etudier les limites aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **(01,5 pt)**
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 pt)**
4) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**
5) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(01 pt)**
6) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$. **(0,75 pt)**
7) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5 pt)**
8) Montrer sur l'intervalle $]1\,,2[$ que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $1,2<\alpha<1,3$. **(0,5 pt)**
9) Construire (C_f) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**
10) Calculer en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x=2, x=3$, $y=-1$ et la courbe (C_f) de f. **(0,5 pt)**